New solutions to Einstein's field theory



1985 J. Phys. A: Math. Gen. 18 2555

(http://iopscience.iop.org/0305-4470/18/13/030)

J. Phys. A: Math. Gen. **18** (1985) 2555-2559. Printed in Great Britain

# Neue Lösungen der Einsteinschen Feldtheorie, die gegen deren Interpretierbarkeit sprechen

Klaus Buchner

Mathematisches Institut der Technischen Universität, Arcisstrasse 21, D-8000 München 2, Bundesrepublik Deutschland

Erhalten am 15 Oktober 1984, in endgültiger Fassung am 14 März 1985

**Zusammenfassung.** Zur Einsteinschen Einheitlichen Feldtheorie von 1945 werden Lösungen angegeben, bei denen die Metrik in geeigneten lokalen Koordinaten durch eine konstante Matrix $g_{ik}$ dargestellt wird, bei denen aber die Krümmung und die Torsion nicht verschwinden. Die Existenz dieser Lösungen schließt eine physikalische Interpretation von Torsion und Krümmung durch energie oder impulsbehaftete Felder aus.

**Abstract.** We derive solutions to Einstein's unified field theory of 1945, whose metric tensor is represented in some local coordinate system through a constant matrix $g_{ik}$, but whose curvature and torsion do not vanish. The existence of these solutions excludes the interpretation of the curvature and torsion as physical fields carrying energy or momentum.

## 1. Einführung

Im Jahr 1946 entwickelte Einstein eine Theorie [1-3], die zur geometrischen Beschreibung der elektromagnetischen und der Gravitations-Wechselwirkung dienen sollte. Bei der physikalischen Interpretation dieser Theorie ergeben sich erhebliche Schwierigkeiten. Man erkannte nämlich schon bald, daß die Bewegungsgleichungen von Probekörpern im Grenzfall schwacher Felder nicht durch die Lorentzkraft beschrieben werden. Außerdem wird es häufig als Nachteil empfunden, daß diese Theorie rein geometrisch formuliert ist, also kein explizit auftauchendes (quantisiertes) Fermionenfeld enthält. Ein solches Feld kann jedoch in natürlicher Weise mit dem antisymmetrischen Teil der Metrik verknüpft werden.

In der Vergangenheit wurden zahlreiche Versuche unternommen, physikalisch akzeptable Bewegungsgleichungen zu bekommen, indem verschiedene Interpretationen der in der Einsteinschen Theorie auftauchenden Felder vorgeschlagen wurden. Diese Versuche wurden bis in die jüngste Zeit fortgesetzt (siehe, z.B. [11]). Daher ist es sinnvoll zu fragen, ob nicht aufgrund allgemeinerer überlegungen eine physikalische Interpretation ausgeschlossen werden kann.

Analog zu [4] wird dabei folgendermaßen vorgegangen: es werden Lösungen der Feldgleichungen angegeben, die eine nicht-verschwindende Krümmung und Torsion besitzen, deren Metrik aber konstant ist. In der Riemannschen Geometrie ist dies natürlich unmöglich; auch in der Einsteinschen einheitlichen Feldtheorie folgt im allgemeinen aus der Konstanz der Metrik das Verschwinden des Zusammenhangs. Ausnahmen sind lediglich im Fall $(\mathscr{g}/\mathscr{h})(\mathscr{g}/\mathscr{h}-2)=0$ ($\mathscr{g}$ ist die Determinante der Metrik, $\mathscr{h}$ die Determinante des symmetrischen Teils der Metrik) möglich, da hier der Zusammenhang nicht eindeutig durch die Metrik bestimmt ist [5, 6]. Interessanterweise tritt bei den im folgenden beschriebenen Lösungen der Fall $\mathscr{g}=0$ nicht auf.

## 2. Die Lösungen

Die Gleichungen der Einsteinschen einheitlichen Feldtheorie bestimmen die Geometrie einer vier-dimensionalen Mannigfaltigkeit mit einer Metrik $g$, deren symmetrischer Teil $h$ normal-hyperbolisch ist. In lokalen Koordinaten lassen sich die Feldgleichungen in der folgenden Form angeben

$$g_{ik,l}-\Gamma^s_{il}g_{sk}-\Gamma^s_{lk}g_{is}=0, \qquad \Gamma^s_{[is]}=0, \tag{1a, b}$$

$$R_{(ik)}=0, \qquad R_{[ik,l]}=0. \tag{1c, d}$$

Dabei sind $g_{ik}$ die Komponenten der Metrik $g$ und $\Gamma^s_{il}$ die des Affinzusammenhangs (Indizes laufen von 1 bis 4). Der Ricci-Tensor $R$ ist definiert durch

$$R_{ik}:=\Gamma^s_{is,k}-\Gamma^s_{ik,s}+\Gamma^s_{it}\Gamma^t_{sk}-\Gamma^s_{ik}\Gamma^t_{st}.$$

Ein Komma vor einem Index, etwa $l$, bedeutet die partielle Ableitung nach der lokalen Koordinate $x^l$, und runde (bzw. eckige) Klammern um Indizes bezeichnen den symmetrischen (antisymmetrischen) Teil bezüglich dieser Indizes. Wir verwenden die Einsteinsche Summenkonvention.

Zunächst trennt man (1$a$) in den symmetrischen und den antisymmetrischen Teil auf, wobei die Definitionen

$$\begin{aligned} &h_{ik}:=g_{(ik)} \qquad k_{ik}:=g_{[ik]} \\ &U^i_{kl}:=\Gamma^i_{(kl)} \qquad S^i_{kl}:=\Gamma^i_{[kl]} \qquad \text{d.h. } \Gamma^i_{kl}=U^i_{kl}+S^i_{kl} \end{aligned} \tag{2}$$

nützlich sind. Damit ergibt sich

$$h_{ik,l}-U^s_{il}h_{sk}-U^s_{lk}h_{is}-S^s_{il}k_{sk}-S^s_{lk}k_{is}=0 \tag{3}$$

$$k_{ik,l}-U^s_{il}k_{sk}-U^s_{lk}k_{is}-S^s_{il}h_{sk}-S^s_{lk}h_{is}=0. \tag{4}$$

Im folgenden setzen wir voraus, daß

$$h_{ik,l}=0 \qquad \text{und} \qquad k_{ik,l}=0 \tag{5}$$

erfüllt ist und daß

$$\mathscr{h}:=\det(h_{ik})\neq 0 \tag{6}$$

gilt. Ferner nehmen wir an, daß sowohl $h_{ik}$ als auch $k_{ik}$ in ihrer Normalform sind, d.h., daß

$$g_{ik}=\begin{pmatrix} 1 & k_{12} & 0 & 0 \\ -k_{12} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k_{34} \\ 0 & 0 & -k_{34} & -1 \end{pmatrix} \tag{7}$$

gilt. Man beachte, daß i.a. $h_{ik}$ und $k_{ik}$ nicht *gleichzeitig* auf Normalform gebracht werden können, so daß (7) eine Einschränkung der Allgemeinheit bedeutet.

Vertauscht man in (3) die Indizes $i$, $l$ bzw. $k$, $l$, so folgt wegen (5) aus den entstehenden Gleichungen

$$U_{k|il} = S^{s}_{kl} k_{is} + S^{s}_{ik} k_{sl}, \tag{8}$$

wobei die Indizes mit $h_{ik}$ gesenkt bzw. mit dessen Inversem $h^{ik}$ gehoben werden. Ebenso leitet man aus (4) die Beziehung

$$S_{l|ik} = U^{s}_{il} k_{ks} + U^{s}_{kl} k_{si}$$

ab. Setzt man hier (8) ein, entsteht

$$S_{l|ik} = (S^{t}_{sl} k_{it} + S^{t}_{is} k_{tl}) k^{s}_{k\cdot} + (S^{t}_{sl} k_{kt} + S^{t}_{ks} k_{tl}) k^{s}_{\cdot i}. \tag{9}$$

Daraus ergibt sich unmittelbar

$$S_{1|12} = S_{2|12} = S_{3|34}(1 - k^2_{34}) = S_{4|34}(1 - k^2_{34}) = 0.$$

Durch lineare Kombinationen der übrigen Gleichungen von (9) folgt aus einer längeren Rechnung, daß nur für bestimmte Werte von $k_{ik}$ (die $g = 0$ bzw. $g = 2h$ ergeben) die Torsion nicht identisch verschwindet.

*Fall 1.* $k^2_{34} = 1$, $k_{12}$ *beliebig*

Nur die Komponenten

$$\begin{aligned} &S_{3|14},\ S_{3|24} \\ &S_{1|34} = 2S_{3|14}, \qquad S_{4|13} = -S_{3|14} \\ &S_{2|34} = 2S_{3|24}, \qquad S_{4|23} = -S_{3|24} \end{aligned} \tag{10}$$

von $S$ können von Null verschieden sein. (Die Gleichungen (9) lassen zwar noch

$$S_{3|13} = -S_{4|14} \neq 0, \qquad S_{3|23} = -S_{4|24} \neq 0, \qquad S_{3|34} \neq 0, \qquad S_{4|34} \neq 0$$

zu. Diese Komponenten müssen jedoch wegen (1$b$) verschwinden.)

*Fall 2.* $k^2_{12} = 1$ *und* $k_{34} = 0$

Nur die folgenden Komponenten des Torsionstensors können Werte $\neq 0$ annehmen

$$S_{1|23} = S_{2|13}, \qquad S_{1|24} = S_{2|14}, \qquad S_{1|13} = -S_{2|23}, \qquad S_{1|14} = -S_{2|24}. \tag{11}$$

In allen übrigen Fällen verschwindet der Torsionstensor und damit wegen (8) auch der gesamte Affinzusammenhang.

Der Fall 1 liefert jedoch nur triviale Ergebnisse: Setzt man (10) in (8) ein und berechnet damit die Komponenten $R_{11}$ und $R_{22}$, so folgt aus (1$c$) $S_{3|14} = S_{3|24} = 0$.

Es bleibt also nur noch der Fall 2. Aus (11) und (1$c$) ergeben sich die Bedingungen

$$S_{1|13,1} + S_{1|23,2} = 0 \tag{12}$$

$$S_{1|13,2} - S_{1|23,1} = 0 \tag{13}$$

$$S_{1|14,1} + S_{1|24,2} = 0 \tag{14}$$

$$S_{1|14,2} - S_{1|24,1} = 0 \tag{15}$$

$$S_{1|13,3} - S_{1|14,4} = 0 \tag{16}$$

$$S_{1|23,3} - S_{1|24,4} = 0 \tag{17}$$

$$(S_{1|13})^2 + (S_{1|23})^2 = (S_{1|14})^2 + (S_{1|24})^2. \tag{18}$$

Die Gleichungen (12)-(15) lassen sich als Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen der komplexen Funktionen

$$A(z, x^3, x^4) := S_{1|23} + \mathrm{i} S_{1|13}$$

$$B(z, x^3, x^4) := S_{1|24} + \mathrm{i} S_{1|14}$$

mit $z := x^1 + \mathrm{i}x^2$ deuten. (16) und (17) sind die Integrabilitätsbedingungen für ein komplexes Potential $V$, so daß $A = V_{,4}$ und $B = V_{,3}$ gilt. (Beachte, daß in den lokalen Koordinatenumgebungen die Kohomologie trivial ist.) (18) bedeutet schließlich $|V_{,3}| = |V_{,4}|$. Wegen (12)-(18) besitzt $R_{[ik]}$ nur eine nicht-verschwindende Komponente, nämlich

$$R_{[34]} = 4k_{12}(S_{1|23}S_{1|14} - S_{1|24}S_{1|13}) \tag{19}$$

$R_{[34]}/(4k_{12})$ ist die Fläche $F$, die von den Vektoren $A$, $B$ in der Gaußschen Ebene aufgespannt wird. Damit reduziert sich ($1d$) auf die Gleichungen

$$R_{[34],1} = R_{[34],2} = 0,$$

d.h. $\mathrm{d}F/\mathrm{d}z = 0$.

*Satz.* Die nicht-trivialen, stetig differenzierbaren Torsionstensoren $S$, die den Gleichungen (1) unter den Voraussetzungen (5)-(7) genügen, werden durch eine komplexe Funktion $V(z, x^3, x^4)$ beschrieben, die in $z := x^1 + \mathrm{i}x^2$ analytisch und in $x^3$, $x^4$ zweimal stetig differenzierbar ist und die $|V_{,3}| = |V_{,4}|$ sowie $(V_{,3} \times V_{,4})_{,z} = 0$ (Kreuzprodukt der Vektoren in der Gaußschen Ebene) erfüllt. Es gilt

$$V_{,3} = S_{1|24} + \mathrm{i}S_{1|14}, \qquad V_{,4} = S_{1|23} + \mathrm{i}S_{1|13}.$$

Die übrigen von Null verschiedenen Komponenten von $S$ ergeben sich aus (11); der Affinzusammenhang $\Gamma$ wird hieraus mit Hilfe von (8) berechnet. $k_{ik}$ hat als einzige nicht-verschwindende Komponente $k_{12} = \pm 1$.

## 3. Zur physikalischen Interpretation der Einsteinschen einheitlichen Feldtheorie

Die soeben abgeleiteten Lösungen der Feldgleichungen (1) haben wichtige Konsequenzen für die physikalische Interpretation der Einsteinschen Theorie.

In der Formel (19) für $R_{[34]}$ kommen nur in $S$ quadratische Terme vor. Daher ist diese Lösung kräftig im Sinn von [7] (vgl. hierzu auch die in [8] angegebenen Christoffelsymbole). (19) kann auch dazu herangezogen werden, die bisher vorgeschlagenen physikalischen Interpretationen der Feldgleichungen zu diskutieren und auf ihre Widerspruchsfreiheit hin zu untersuchen.

Bereits kurz nach der Veröffentlichung der Einsteinschen einheitlichen Feldtheorie wurde bemerkt, daß sich der antisymmetrische Teil $k_{ik}$ der Metrik nicht als elektromagnetisches Feld deuten läßt, weil sonst Bewegungsgleichungen für punktförmige Teilchen entstehen, die mit der Beobachtung im Widerspruch stehen. Später konnte in [4] sogar nachgewiesen werden, daß $k_{ik}$ kein physikalisches Feld beschreiben kann, das Träger von Energie in irgendeiner Form ist. Es existieren nämlich Lösungen der Feldgleichungen, in denen $k_{ik} \neq 0$ ist, aber alle Energiekomplexe und der Energie-Impulstensor verschwinden. Also lag es nahe, die Torsion als elektromagnetisches Viererpotential zu deuten [9]. Daß diese Interpretation trotz ihrer formalen Eleganz auf Schwierigkeiten führt, konnte schon aus den frühen Arbeiten über sphärisch symmetrische Lösungen, z.B. aus [10], entnommen werden.

Die oben abgeleiteten Lösungen der Feldgleichungen ermöglichen es jetzt, ganz allgemein Deutungen der Torsion und des Ricci-Tensors durch physikalische Felder auszuschließen, die Energie oder Impuls mit sich führen. Wegen der Konstanz des symmetrischen Teils der Metrik verschwindet nämlich der Energie-Impulstensor, der nach den Gleichungen der Allgemeinen Relativitätstheorie aus dem Ricci-Tensor der $h_{ik}$ berechnet wird. Ebenso verschwinden alle Energiekomplexe. Andererseits sind die Torsion und $R_{[ik]}$ ungleich Null.

Ähnliche Probleme treten auch in der quantisierten Theorie auf [12]. Daher schließen diese Lösungen zusammen mit den in [4] diskutierten alle bisher bekannten Versuche einer Deutung der Einsteinschen Einheitlichen Feldtheorie aus, auch die von Klotz *et al* [11]. Man beachte jedoch, daß Interpretationen, die sich auf eine reine Theorie der Gravitation beschränken [13], von diesem Argument nicht betroffen werden.

## Literatur

[1] Einstein A 1945 *Ann. Math.* **46** 578–84
Einstein A und Straus E G 1946 *Ann. Math.* **47** 731–41
[2] Einstein A 1973 *Grundzüge der Relativitätstheorie (Anhang II), 5. Auflage, WTB Band 58* (Braunschweig: Vieweg)
[3] Schrödinger E 1950 *Space-Time Structure* (Cambridge: CUP)
[4] Buchner K 1975 *Tensor* **29** 267–73
[5] Hlavatý V 1957 *Geometry of Einstein's Unified Field Theory* (Groningen: Noordhoff)
[6] Mishra R S 1959 *Tensor* **9** 8–43
Lal K B und Mishra R S 1960 *Tensor* **10** 218–37
[7] Buchner K 1982 *Tensor* **38** 65–8
[8] Buchner K 1972 *Prog. Theor. Phys.* **48** 1708–17
[9] Sciama D W 1961 *J. Math. Phys.* **2** 472–7
[10] Takeno H, Ikeda M und Abe S 1951 *Prog. Theor. Phys.* **6** 837–48
[11] Klotz A H und Gregory L Y 1981 *Gen. Rel. Grav.* **13** 155–74
[12] Mann R B und Moffat J W 1982 *Phys. Rev.* D **26** 1858–61
[13] Moffat J W 1979 *Phys. Rev.* D **19** 3554–8; 1983 *Phys. Rev. Lett.* **50** 709–12